Tracce degli esami di

PROBABILITÀ E STATISTICA [3231]

Corso di Studi: Laurea Triennale in Ingegneria Gestionale
Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management
Politecnico di Bari

Appelli a.a. 2024–2025

Gianluca Orlando

Indice

1 Tracce

Di seguito le tracce dell'a.a. 2024-2025.

Esame di Probabilità e Statistica [3231]

Corso di Studi di Ingegneria Gestionale (D.M.270/04) (L)

Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management
Politecnico di Bari

Cognome: ____________________ Docente: Gianluca Orlando
Nome: ____________________ Appello: giugno 2025 - turno 1
Matricola: ____________________ Data: 17/06/2025

Questa è la **traccia n. 1**. È obbligatorio consegnare la traccia con cognome e nome. In caso contrario, l'esito sarà "RITIRATO". Scrivere il numero di traccia sullo svolgimento del compito. Tempo massimo: 2 ore.

Esercizio 1. (6 punti) Si analizzano le vendite giornaliere di alcune librerie. I dati raccolti sono i seguenti (in euro):

420 380 650 720 490 580 340 1050 610 530 680 450

1. Calcolare i quartili esclusivi dei dati.
2. Determinare eventuali dati anomali e sospetti.
3. Rappresentare i dati in un box plot.
4. Calcolare il ventesimo percentile.

Esercizio 2. (7 punti) In un impianto di produzione avvengono incidenti con una media di 2 a settimana e distribuiti con una legge di Poisson. Si assuma che i numeri di incidenti in settimane diverse siano indipendenti.

1. Calcolare la probabilità che in una settimana si verifichino almeno 3 incidenti (3 inclusi).
2. Qual è la deviazione standard del numero di incidenti in una settimana?
3. Calcolare la probabilità che in 4 settimane si verifichino esattamente 10 incidenti.
4. Sapendo che nella prima settimana si sono verificati almeno 3 incidenti (3 inclusi), calcolare la probabilità che nelle prime due settimane si verifichino esattamente 5 incidenti (inclusi).
5. Approssimare la probabilità che in un anno (52 settimane) si verifichi un numero di incidenti compreso tra 100 e 120.

Esercizio 3. (8 punti) La durata di una telefonata in un *call center* è descritta dal seguente modello: se il cliente chiede solo informazioni (il 30% delle volte), la durata della telefonata ha distribuzione $\mathrm{U}(1, 3)$; se il cliente chiede assistenza tecnica (il 70% delle volte), la durata della telefonata è un tempo con assenza di memoria e con media 5 minuti.

1. Calcolare la probabilità che una telefonata di un cliente che chiede solo informazioni duri più di 2 minuti.

2. Calcolare la probabilità che una telefonata di un cliente che chiede solo informazioni duri meno di 1 minuto.

3. Calcolare la probabilità che una telefonata di un cliente che chiede assistenza tecnica duri più di 10 minuti.

4. Una telefonata è durata più di 2 minuti. Calcolare la probabilità che il cliente abbia chiesto assistenza tecnica.

5. Un operatore risponde a una telefonata, viene richiesta assistenza tecnica. Appena chiude la telefonata, l'operatore risponde a un'altra telefonata, sempre con richiesta di assistenza tecnica. Calcolare la probabilità che per le due telefonate l'operatore sia impegnato per più di 10 minuti.

6. Due operatori rispondono contemporaneamente e decidono di andare in pausa quando entrambi hanno terminato le loro telefonate (non si sa se informazioni o assistenza tecnica). Calcolare la probabilità che i due operatori vadano in pausa dopo più di 2 minuti, assumendo le durate delle telefonate indipendenti.

Esercizio 4. (7 punti) Sei il responsabile della qualità in un'azienda che produce batterie per smartphone. Il processo di produzione dovrebbe garantire una durata media delle batterie di almeno 12 ore sotto condizioni di utilizzo standard. Per verificare ciò, decidi di campionare alcune batterie e testarne la durata, ottenendo i seguenti risultati (in ore):

11.5 12.2 11.8 12.0 12.5 11.9 12.1 11.7 12.3 11.6

Assumendo che la durata delle batterie segua una distribuzione normale, rispondi alle seguenti domande:

1. Si può affermare con significatività del 10% che il processo di produzione non garantisce la durata media minima? (N.B.: derivare le formule)

2. Il p-value dei dati è superiore o inferiore a 0.1?

Quesito teorico 1. (2 punti) Calcolare valore atteso e varianza di una variabile aleatoria con legge binomiale.

Quesito teorico 2. (4 punti) Che legge discreta ha assenza di memoria? Dimostrare che è l'unica.

Esame di Probabilità e Statistica [3231]

Corso di Studi di Ingegneria Gestionale (D.M.270/04) (L)

Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management
Politecnico di Bari

Cognome: ____________________	Docente: Gianluca Orlando
Nome: ____________________	Appello: giugno 2025 - turno 1
Matricola: ____________________	Data: 17/06/2025

Questa è la **traccia n. 2**. È obbligatorio consegnare la traccia con cognome e nome. In caso contrario, l'esito sarà "RITIRATO". Scrivere il numero di traccia sullo svolgimento del compito. Tempo massimo: 2 ore.

Esercizio 1. (6 punti) Un ente di ricerca sul mercato immobiliare ha raccolto i prezzi di vendita (in migliaia di euro) di appartamenti in una città. I dati sono i seguenti:

Classe di prezzo (in migliaia di euro)	Frequenza assoluta
$[50, 100)$	10
$[100, 130)$	20
$[130, 150)$	15
$[150, 200)$	30
$[200, 250)$	18
$[250, 400)$	17

1. Rappresentare i dati in un istogramma delle densità di frequenze relative.
2. Determinare la classe modale.
3. Calcolare un'approssimazione della media e della deviazione standard dei dati.
4. Calcolare un'approssimazione del novantesimo percentile dei prezzi dei dati.

Esercizio 2. (7 punti) In un impianto di produzione, i componenti prodotti sono difettosi con probabilità 3%. Si assumano componenti diversi indipendenti tra loro.

1. Calcolare la probabilità che in un lotto di 20 componenti ce ne siano al massimo 3 difettosi (3 inclusi).
2. Calcolare media e varianza del numero di componenti difettosi in un lotto di 20 componenti.
3. Approssimare la probabilità che in un lotto di 150 componenti ce ne siano esattamente 10 difettosi. Tenere conto del fatto che il lotto è numeroso e che la probabilità di difetto è molto piccola.
4. Vengono prodotti in sequenza lotti da 20 componenti. Si consideri la variabile aleatoria che indica la prima volta in cui si individua un lotto con più di 3 componenti difettosi (3 esclusi). Calcolarne media e varianza.

Esercizio 3. (8 punti) Nell'esame di Probabilità e Statistica, il tempo che impiega una persona per svolgere un singolo esercizio cambia a seconda del livello di studio. Le persone che hanno studiato molto (sono il 20%) impiegano un tempo distribuito uniformemente tra 15 e 30 minuti, mentre le persone che hanno studiato poco (sono l'80%) impiegano un tempo distribuito esponenzialmente con media 25 minuti.

1. Calcolare la media e la deviazione standard del tempo che impiega una persona che ha studiato molto per svolgere un singolo esercizio.
2. Calcolare la probabilità che una persona che ha studiato poco impieghi più di 30 minuti per svolgere un singolo esercizio.
3. Una persona che ha studiato poco non ha ancora terminato di svolgere un esercizio dopo 30 minuti. Calcolare la probabilità che questa persona impieghi in tutto più di 40 minuti per svolgere l'esercizio.
4. Una persona ha impiegato meno di 20 minuti per svolgere un singolo esercizio. Calcolare la probabilità che questa persona abbia studiato molto.
5. Una persona che ha studiato poco svolge due esercizi consecutivi. Calcolare la probabilità che impieghi in tutto più di 60 minuti per svolgere i due esercizi. Si assuma che i tempi impiegati per i due esercizi siano indipendenti.
6. Son rimaste due persone all'esame e iniziano a svolgere un esercizio nello stesso momento. Il docente andrà via quando entrambi avranno terminato. Calcolare la probabilità che il docente vada via entro 20 minuti. Si assuma che i tempi impiegati dalle due persone siano indipendenti.

Esercizio 4. (7 punti) Sei il responsabile della qualità in un'azienda che produce batterie per smartphone e stai testando la varianza delle batterie. Il processo di produzione dovrebbe garantire una varianza di al massimo 4 ore^2 sotto condizioni di utilizzo standard. Per verificare ciò, decidi di campionare alcune batterie e testarne la durata, ottenendo i seguenti risultati (in ore):

$$8.4 \quad 12.0 \quad 10.4 \quad 12.5 \quad 11.8 \quad 14.6 \quad 9.1 \quad 8.2$$

Assumendo che la durata delle batterie segua una distribuzione normale, rispondi alle seguenti domande:

1. Si può affermare con significatività del 5% che il processo di produzione non garantisce la varianza massima? (N.B.: derivare le formule)
2. Il p-value dei dati è superiore o inferiore a 0.05?

Quesito teorico 1. (2 punti) Siano $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$ e $Y \sim \mathrm{P}(\mu)$ indipendenti. Dimostrare che $X + Y \sim \mathrm{P}(\lambda + \mu)$.

Quesito teorico 2. (4 punti) Siano X e Y due variabili aleatorie continue indipendenti. Dimostrare la formula per il calcolo della f.d.p. di $Z = X + Y$.

Esame di Probabilità e Statistica [3231]

Corso di Studi di Ingegneria Gestionale (D.M.270/04) (L)

Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management
Politecnico di Bari

Cognome: ____________________ Docente: Gianluca Orlando
Nome: ____________________ Appello: giugno 2025 - turno 1
Matricola: ____________________ Data: 17/06/2025

Questa è la **traccia n. 3**. È obbligatorio consegnare la traccia con cognome e nome. In caso contrario, l'esito sarà "RITIRATO". Scrivere il numero di traccia sullo svolgimento del compito. Tempo massimo: 2 ore.

Esercizio 1. (6 punti) Un portale immobiliare studia il prezzo in funzione della superficie degli appartamenti in vendita in una città. Vengono registrati alcuni dati:

Metri quadri	65	78	82	70	95	72	65
Prezzo (migliaia di euro)	125	160	169	138	196	153	111

1. Rappresentare i dati in uno scatterplot.
2. Calcolare la retta di regressione lineare e rappresentarla nel grafico.
3. Calcolare il coefficiente di correlazione lineare e il coefficiente di determinazione.

Esercizio 2. (7 punti) Sia (X, Y) un vettore aleatorio discreto con range

$$R(X, Y) = \{(0, -1), (1, -1), (0, 1), (1, 1), (2, 1)\}$$

e tale che:

- $\mathbb{P}(\{X = 0, Y = -1\}) = \mathbb{P}(\{T > 1\})$ dove $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ con $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\ln(6)}$ (mantenendo il valore esatto ln(6) si semplificano i calcoli: NON scrivere il valore numerico);
- valgano le seguenti relazioni:

$$\mathbb{P}(\{X = 1\}|\{Y = -1\}) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{E}(X^3) = 3, \quad \mathbb{E}(XY) = \frac{2}{3}.$$

1. Determinare la legge congiunta di (X, Y).
2. Calcolare $\text{Cov}(X, Y)$ e stabilire se X e Y sono indipendenti.
3. Calcolare $\text{Var}(2X + 4Y)$.
4. Il vettore (X, Y) viene campionato in sequenza tante volte in modo indipendente. Calcolare la probabilità che la prima osservazione di $(2, 1)$ avvenga entro il decimo campionamento (decimo incluso).

Esercizio 3. (8 punti) Il tempo che impiega il docente di Probabilità e Statistica per correggere un compito d'esame è una variabile aleatoria. Per un singolo compito, il tempo ha legge esponenziale, ma la media cambia a seconda del livello di preparazione dello studente: per i compiti svolti in modo ottimo (il 10%), la media è 5 minuti; per i compiti svolti mediocremente (il 70%), la media è 10 minuti; per i compiti svolti in modo gravemente insufficiente (il 20%), la media è 2 minuti.

1. Calcolare la probabilità che il docente impieghi un tempo compreso tra 4 e 6 minuti per correggere un compito svolto in modo ottimo.
2. Calcolare la probabilità che il docente impieghi esattamente 604.3 secondi per correggere un compito.
3. Calcolare la deviazione standard del tempo di correzione per un compito svolto in modo gravemente insufficiente.
4. Qual è la probabilità che il docente impieghi più di 10 minuti per correggere un compito scelto a caso?
5. Stabilire, motivando la risposta, se il tempo di correzione per un compito scelto a caso gode di assenza di memoria.
6. Durante la correzione, capita un blocco di 12 compiti svolti tutti in modo gravemente insufficiente. La probabilità che il docente impieghi più di 15 minuti per correggere il blocco di 12 compiti è maggiore o minore del 95%? Si assumano i compiti indipendenti.

Esercizio 4. (7 punti) Una catena di supermercati vuole studiare il tempo medio che i clienti trascorrono nel negozio durante la spesa settimanale. Si crede che il tempo medio sia 25 minuti e per confermarlo viene effettuata un'indagine su un campione, raccogliendo i seguenti dati sui tempi di permanenza (in minuti):

Tempo (minuti)	15	20	25	30	35	40
Frequenza assoluta	4	13	10	6	8	9

Si assuma che la deviazione standard della popolazione sia nota e pari a 8 minuti.

1. Si può stabilire con significatività 1% che il tempo medio di permanenza dei clienti nel negozio è diverso da 25 minuti? (N.B.: Ricavare le formule)
2. Calcolare il p-value dei dati raccolti. (N.B.: Ricavare le formule)

Quesito teorico 1. (2 punti) Spiegare come si calcolano le f.d.p. marginali di un vettore aleatorio continuo quando è nota la sua f.d.p. congiunta.

Quesito teorico 2. (4 punti) Enunciare e dimostrare un teorema che spieghi la relazione tra legge binomiale e legge di Poisson.

Esame di Probabilità e Statistica [3231]

Corso di Studi di Ingegneria Gestionale (D.M.270/04) (L)

Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management
Politecnico di Bari

Cognome: ____________________	Docente: Gianluca Orlando
Nome: ____________________	Appello: giugno 2025 - turno 2
Matricola: ____________________	Data: 17/06/2025

Questa è la **traccia n. 4**. È obbligatorio consegnare la traccia con cognome e nome. In caso contrario, l'esito sarà "RITIRATO". Scrivere il numero di traccia sullo svolgimento del compito. Tempo massimo: 2 ore.

Esercizio 1. (6 punti) Un'azienda di trasporti ha rilevato i tempi di consegna (in ore) di 150 pacchi durante il mese di maggio. I dati sono stati raggruppati nelle seguenti classi:

Tempo di consegna (ore)	Frequenza assoluta
$[0, 6)$	15
$[6, 12)$	28
$[12, 24)$	45
$[24, 36)$	32
$[36, 60)$	22

1. Rappresentare i dati in un istogramma delle densità di frequenze relative.
2. Determinare la classe modale.
3. Calcolare un'approssimazione della media e della deviazione standard dei dati.
4. Calcolare un'approssimazione del decimo percentile dei dati.

Esercizio 2. (8 punti) Nell'arco di un'ora, il numero di clienti che usufruiscono di un servizio di assistenza telefonica ha legge di Poisson. Si assuma che il parametro della distribuzione di Poisson dipenda dalla fascia oraria della giornata di servizio, come indicato nella seguente tabella:

Fascia oraria	08:00-09:00	09:00-10:00	10:00-11:00	11:00-12:00	12:00-13:00
λ	2	3	4	3	2

Si assuma che fasce orarie diverse siano indipendenti tra loro. Calcolare:

1. la probabilità che nella fascia oraria 08:00-09:00 usufruiscano del servizio più di 4 clienti (4 esclusi);
2. la probabilità che nella fascia oraria 08:00-11:00 usufruiscano del servizio più di 4 clienti (4 esclusi);

3. il numero medio e la deviazione standard di clienti che usufruiscono del servizio nella fascia oraria 08:00-13:00;
4. la probabilità che in una giornata di servizio (08:00-13:00) usufruiscano del servizio 7 clienti, sapendo che nella fascia oraria 08:00-11:00 hanno usufruito del servizio più di 4 clienti (4 esclusi);
5. un'approssimazione della probabilità che in 40 giornate di servizio (08:00-13:00) usufruiscano del servizio più di 500 clienti;

Esercizio 3. (7 punti) Il pianto di una bambina di un anno ha una distribuzione esponenziale che dipende dal suo stato. Se non è successo nulla di particolare (il 90% delle volte), il pianto ha una media di 1 minuto. Se invece è successo qualcosa di particolare (il 10% delle volte), il pianto ha una media di 5 minuti.

1. Si assuma che non sia successo nulla di particolare. Qual è la probabilità che il pianto duri più di 2 minuti?
2. Si assuma che sia successo qualcosa di particolare. La bambina continua a piangere dopo 2 minuti. Qual è la probabilità che l'intero pianto duri più di 6 minuti?
3. La bambina sta piangendo da più di 6 minuti. Qual è la probabilità che sia successo qualcosa di particolare?
4. I genitori della bambina la vedono piangere tante volte in sequenza, ogni volta indipendenti tra loro. Calcolare la probabilità che la bambina pianga per più di 6 minuti per la prima volta al decimo pianto.
5. Alla bambina è successo qualcosa di particolare e piange due volte consecutivamente, indipendenti tra loro. Calcolare la probabilità che l'intero pianto duri più di 6 minuti.

Esercizio 4. (7 punti) Un'azienda di *e-commerce* sta valutando la stabilità dei tempi di caricamento del proprio sito web. Per garantire una buona user experience, è fondamentale che i tempi di caricamento non siano troppo variabili. Il sistema attuale ha una deviazione standard dei tempi di caricamento pari a 0.8 secondi. Dopo aver implementato una nuova tecnologia, l'azienda vuole verificare se la variabilità dei tempi di caricamento è diminuita. Un campione di pagine caricate con il nuovo sistema ha registrato i seguenti tempi (in secondi):

$$2.1 \quad 2.4 \quad 1.9 \quad 2.3 \quad 2.0 \quad 2.2 \quad 1.8 \quad 2.5 \quad 2.1\,.$$

Si assuma che i tempi di caricamento seguano una distribuzione normale.

1. L'azienda può stabilire con significatività 5% che la deviazione standard dei tempi di caricamento è diminuita? (N.B.: derivare le formule)
2. In quale di questi intervalli è collocato il p-value del test? $[0\%, 0.5\%)$, $[0.5\%, 1\%)$, $[1\%, 2.5\%)$, $[2.5\%, 5\%)$, nessuno dei precedenti.

Quesito teorico 1. (2 punti) Calcolare $\mathbb{E}(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$, dove $X \sim \mathrm{B}(n, p)$.

Quesito teorico 2. (4 punti) Siano $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ e $Y \sim \mathcal{N}(\nu, \tau^2)$ indipendenti. Dimostrare che $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu + \nu, \sigma^2 + \tau^2)$.

Esame di Probabilità e Statistica [3231]

Corso di Studi di Ingegneria Gestionale (D.M.270/04) (L)

Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management
Politecnico di Bari

Cognome: ____________________ Docente: Gianluca Orlando
Nome: ____________________ Appello: giugno 2025 - turno 2
Matricola: ____________________ Data: 17/06/2025

Questa è la **traccia n. 5**. È obbligatorio consegnare la traccia con cognome e nome. In caso contrario, l'esito sarà "RITIRATO". Scrivere il numero di traccia sullo svolgimento del compito. Tempo massimo: 2 ore.

Esercizio 1. (6 punti) Un'azienda agricola vuole analizzare la relazione tra la quantità di fertilizzante utilizzato e la resa di grano per ettaro. Ha raccolto dati da alcuni appezzamenti di terreno simili e ha ottenuto i seguenti risultati:

Fertilizzante (kg/ettaro)	80	100	120	135	150	165	180	195	210
Resa (quintali/ettaro)	34	38	42	44	46	47	46	45	44

1. Rappresentare i dati in uno scatterplot.
2. Calcolare la retta di regressione lineare e rappresentarla nel grafico.
3. Calcolare il coefficiente di correlazione lineare e il coefficiente di determinazione.

Esercizio 2. (7 punti) Si consideri un vettore aleatorio (X, Y) con range $R(X, Y) = \{(0, -1), (-1, 0), (0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ e tale che valgano le seguenti relazioni:

$$\mathbb{P}(\{X = 0, Y = 1\}) = \mathbb{P}(\{T < 3\}), \text{ dove } T \sim U(1, 6),$$

$$\mathbb{P}(\{Y = 0\}|\{X = 0\}) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(\{X = -1\} \cup \{X = 1\}) = \mathbb{P}(\{X = 0, Y = 0\}) = 2\,\mathbb{P}(\{X = 1\})$$

1. Determinare la legge congiunta di (X, Y).
2. Calcolare $\mathrm{Var}(X + 2Y)$.
3. Stabilire se X e Y sono indipendenti.
4. Calcolare $\mathbb{E}(X^2 + Y^2)$.
5. Il vettore (X, Y) viene campionato 8 volte. Qual è la probabilità che si osservi almeno 4 volte (4 incluso) il valore $(0, 0)$? Si assuma che le osservazioni siano indipendenti.

Esercizio 3. (8 punti) La durata di un episodio di una serie televisiva segue una distribuzione uniforme nell'intervallo $[36, 44]$ minuti. Si assuma che gli episodi siano indipendenti tra loro.

1. Che probabilità c'è che un episodio duri più di 42 minuti?
2. Qual è la probabilità che la durata di un episodio sia compresa tra 34 e 42 minuti?
3. Calcolare la media e la varianza della durata di un episodio.
4. Una persona sta guardando un episodio. Dopo 40 minuti non è ancora finito. Sapendo ciò, qual è la probabilità che l'episodio duri più di 42 minuti?
5. Una persona decide di fare una maratona, guardando l'intera serie di 40 episodi. Approssimare la probabilità che sarà impegnata per più di 26 ore.
6. Una persona che guarda un episodio si annoia a un tempo T che segue una distribuzione uniforme nell'intervallo $[36, 44]$ minuti, indipendente dalla durata dell'episodio. Se l'episodio dura meno di T, lo vede tutto, altrimenti, interrompe la visione. Calcolare la probabilità che la persona sia occupata a guardare l'episodio per meno di 40 minuti.

Esercizio 4. (7 punti) Un'azienda di *e-commerce* sta valutando l'efficacia di una nuova strategia di marketing. Il tempo medio attuale che i clienti trascorrono sul sito web è di 8.5 minuti. Dopo aver implementato la nuova strategia su un gruppo di utenti, l'azienda vuole verificare se il tempo di permanenza è aumentato significativamente. I dati raccolti (in minuti) su un campione sono i seguenti:

$$9.2 \quad 8.8 \quad 10.1 \quad 9.5 \quad 8.3 \quad 9.7 \quad 10.4$$

Si assuma che la distribuzione dei tempi di permanenza sia normale.

1. L'azienda può sostenere con significatività $\alpha = 0.05$ che il tempo medio di permanenza è aumentato? (N.B.: Derivare le formule)
2. In quale dei seguenti intervalli è contenuto il p-value del test? $[0\%, 0.5\%)$, $[0.5\%, 1\%)$, $[1\%, 2.5\%)$, $[2.5\%, 5\%)$, $[5\%, 10\%)$, nessuno dei precedenti.

Quesito teorico 1. (2 punti) Calcolare la varianza di una variabile aleatoria distribuita con legge geometrica.

Quesito teorico 2. (4 punti) Che legge continua ha assenza di memoria? Dimostrare che è l'unica.

Esame di Probabilità e Statistica [3231]

Corso di Studi di Ingegneria Gestionale (D.M.270/04) (L)

Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management
Politecnico di Bari

Cognome: ______________________	Docente: Gianluca Orlando
Nome: ______________________	Appello: giugno 2025 - turno 2
Matricola: ______________________	Data: 17/06/2025

Questa è la **traccia n. 6**. È obbligatorio consegnare la traccia con cognome e nome. In caso contrario, l'esito sarà "RITIRATO". Scrivere il numero di traccia sullo svolgimento del compito. Tempo massimo: 2 ore.

Esercizio 1. (6 punti) Un'azienda di delivery ha registrato i tempi di consegna (in minuti) per alcuni ordini in una giornata:

15 22 18 35 28 12 55 25 19 33 27 16

1. Calcolare i quartili esclusivi dei dati.
2. Determinare eventuali dati anomali e sospetti.
3. Rappresentare i dati in un box plot.
4. Calcolare l'ottantesimo percentile.

Esercizio 2. (8 punti) La probabilità che una persona iscritta a un appello dell'esame di Probabilità e Statistica si presenti il giorno dell'esame è $p = 0.8$. Si assumano indipendenti le presenze delle persone iscritte.

1. Si consideri un appello con 8 persone iscritte. Qual è la probabilità che si presentino al massimo 6 persone (6 incluse)?
2. Consideriamo due appelli indipendenti. Al primo appello sono iscritte 8 persone, mentre al secondo appello sono iscritte 4 persone. Qual è la probabilità che si presentino esattamente 6 persone in totale nei due appelli?
3. In un appello sono iscritte 280 persone. Approssimare la probabilità che si presentino all'appello almeno 240 persone.
4. Consideriamo un appello per cui non sono ancora aperte le iscrizioni. Non conosciamo il numero di persone che si iscriveranno, ma possiamo assumere che sia una variabile aleatoria con legge di Poisson con media 6. Scrivere la formula per la probabilità che si iscrivano k persone all'appello, per un qualunque k. Sfruttare questa formula e lo sviluppo di Taylor dell'esponenziale per calcolare la probabilità che nessuno si presenti all'appello (senza sapere a priori il numero di iscritti).

Esercizio 3. (7 punti) Le durate dei un meeting di un gruppo di lavoro sono aleatorie. In particolare, i brainstorming hanno una durata esponenziale con media di 30 minuti, mentre le riunioni di coordinamento hanno una durata uniforme con media di 20 minuti e possono durare al massimo 30 minuti. Si assumano indipendenti le durate dei meeting.

1. È previsto un meeting di brainstorming. Qual è la probabilità che duri più di 20 minuti?
2. È previsto un meeting di coordinamento. Qual è la probabilità che duri tra i 5 e i 25 minuti?
3. Sono previsti due meeting di brainstorming consecutivi. Qual è la probabilità che la durata totale dei due meeting sia superiore a 1 ora?
4. Sono previsti due meeting di coordinamento che partono alle 10:00 e si svolgono in parallelo. Alle 10:15 è prevista una pausa per il caffè. Qual è la probabilità che entrambe le riunioni siano terminate prima della pausa?
5. Durante l'anno sono previsti in totale 52 meeting di coordinamento. Approssimare la probabilità che il tempo speso in meeting di coordinamento sia più di 20 ore.

Esercizio 4. (7 punti) Un laboratorio vuole stimare il contenuto medio di vitamina C (in mg) nelle arance di una particolare varietà. Raccoglie un campione casuale di 12 arance e misura il contenuto di vitamina C ottenendo i seguenti risultati:

$$52 \quad 48 \quad 55 \quad 51 \quad 49 \quad 53 \quad 47 \quad 56 \quad 50\,.$$

Assumendo che il contenuto di vitamina C nelle arance segua una distribuzione normale, rispondere alle seguenti domande:

1. Stimare la media della popolazione di vitamina C con un intervallo di confidenza al 90%. (N.B.: derivare le formule)
2. Stimare la media della popolazione dal basso con un limite inferiore di confidenza al 95%. (Non è necessario derivare le formule)

Quesito teorico 1. (2 punti) Dimostrare che la legge geometrica gode di assenza di memoria.

Quesito teorico 2. (4 punti) Enunciare e dimostrare la legge dei grandi numeri.

Esame di Probabilità e Statistica [3231]

Corso di Studi di Ingegneria Gestionale (D.M.270/04) (L)

Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management
Politecnico di Bari

Cognome: ______________________
Nome: ______________________
Matricola: ______________________

Docente: Gianluca Orlando
Appello: luglio 2025
Data: 23/07/2025

Questa è la **traccia n. 1**. È obbligatorio consegnare la traccia con cognome e nome. In caso contrario, l'esito sarà "RITIRATO". Scrivere il numero di traccia sullo svolgimento del compito. Tempo massimo: 2 ore.

Esercizio 1. (6 punti) I consumi mensili di acqua (in m^3) di diverse famiglie sono stati raggruppati in classi come segue:

Classe di consumo (m^3)	[10, 13)	[13, 16)	[16, 18)	[18, 21)	[21, 25)	[25, 28)
Frequenza assoluta	10	12	16	10	20	5

1. Rappresentare i dati in un istogramma delle densità di frequenze relative.
2. Determinare la classe modale.
3. Calcolare un'approssimazione della media e della deviazione standard dei dati.
4. Calcolare un'approssimazione del trentesimo percentile dei dati.

Esercizio 2. (7 punti) Un centro logistico riceve camion per le consegne merci. Il numero di camion che arriva in una fascia oraria segue un processo di Poisson come descritto di seguito:

Fascia oraria	Mattutina (08:00-13:00)	Pomeridiana (13:00-18:00)	Serale (18:00-23:00)
Media di camion	12	8	4

Si assumano le fasce orarie indipendenti tra loro e i camion indipendenti tra loro.

1. Calcolare la probabilità che nella fascia oraria serale arrivino almeno 5 camion (5 inclusi).
2. Calcolare la deviazione standard del numero di camion che arrivano in una giornata intera.
3. Calcolare la probabilità che in una giornata intera arrivino almeno 20 camion (20 inclusi), sapendo che nella fascia oraria 08:00-18:00 ne sono arrivati 15.
4. Calcolare la somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(12p)^n}{n!}$, con $p \in (0,1)$.
5. Si assuma che il 75% dei camion trasporti merci deperibili. Scrivere la formula per la probabilità che, su n camion, tutti trasportino merci deperibili.

6. Calcolare la probabilità che nella fascia oraria mattutina tutti i camion che arrivano trasportino merci deperibili (se non arrivano camion, si consideri la condizione come soddisfatta).

Esercizio 3. (8 punti) Un'azienda di consulenza gestisce progetti di sviluppo software per clienti esterni. Il team di project management ha analizzato i tempi di completamento delle attività. Ogni singola attività segue una distribuzione esponenziale con media di 15 giorni. Si assumano le attività indipendenti tra loro.

1. Calcolare la probabilità che un'attività richieda un tempo compreso tra 10 e 20 giorni per essere completata.
2. Calcolare la probabilità che un'attività venga completata alla mezzanotte del giorno 15.
3. In una parte del progetto, due attività partono contemporaneamente in parallelo. Calcolare la probabilità che almeno una delle due venga completata entro il giorno 20.
4. In una parte del progetto, tre attività partono in parallelo. Calcolare la probabilità che almeno una delle tre venga completata entro il giorno 20.
5. In una parte del progetto, due attività devono essere completate in sequenza (ovvero, la seconda attività può iniziare solo dopo il completamento della prima). Calcolare la probabilità che entrambe le attività vengano completate entro il giorno 40.
6. Si consideri una sequenza di 35 attività (ovvero: attività 1 $\to$ attività 2 $\to \cdots \to$ attività 35 $\to$). Approssimare la probabilità che l'intera sequenza venga completata entro il giorno 590.

Esercizio 4. (7 punti) Un'azienda sta valutando le prestazioni di un nuovo fornitore di componenti elettronici. Il fornitore dichiara che i tempi medi di consegna sono inferiori a 12 giorni dalla data dell'ordine. L'ufficio acquisti dell'azienda vuole verificare se questa affermazione sia credibile e decide di effettuare delle misurazioni su un campione, ottenendo i seguenti tempi di consegna (in giorni):

$$14 \quad 11 \quad 13 \quad 15 \quad 12 \quad 10 \quad 13 \quad 14 \quad 12 \quad 15\,.$$

Si assuma che i tempi di consegna seguano una distribuzione normale.

1. Si può stabilire con significatività 10% che l'affermazione del fornitore non è credibile? (N.B.: derivare le formule)
2. Stabilire in quale dei seguenti intervalli è contenuto il p-value del test: $[0\%, 0.5\%)$, $[0.5\%, 1\%)$, $[1\%, 2.5\%)$, $[2.5\%, 5\%)$, $[5\%, 10\%)$, nessuno dei precedenti.

Quesito teorico 1. (2 punti) Date due variabili aleatorie discrete X e Y indipendenti, dimostrare che $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Quesito teorico 2. (4 punti) Sia $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Che legge ha X^2? Dimostrarlo.

Esame di Probabilità e Statistica [3231]

Corso di Studi di Ingegneria Gestionale (D.M.270/04) (L)

Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management
Politecnico di Bari

Cognome: ______________________ Docente: Gianluca Orlando
Nome: ______________________ Appello: luglio 2025
Matricola: ______________________ Data: 23/07/2025

Questa è la **traccia n. 2**. È obbligatorio consegnare la traccia con cognome e nome. In caso contrario, l'esito sarà "RITIRATO". Scrivere il numero di traccia sullo svolgimento del compito. Tempo massimo: 2 ore.

Esercizio 1. (6 punti) Si considerano i consumi mensili di acqua (in m^3) di alcune famiglie:

16.2 18.5 14.8 19.1 8.6 15.3 17.0 20.4 13.9 25.1 16.8 18.0

1. Calcolare i quartili esclusivi dei dati.
2. Individuare eventuali valori anomali o sospetti.
3. Rappresentare i dati in un box plot.
4. Calcolare il trentesimo percentile.

Esercizio 2. (8 punti) Sia (X, Y) un vettore aleatorio con range

$$R(X, Y) = \{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)\}.$$

Si assuma che

$$\mathbb{P}(\{X = 1\}) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(\{Y = 1\}) = \frac{1}{3}, \quad \mathrm{Cov}(X, Y) = h,$$

dove h è un parametro reale da discutere nelle risposte alle seguenti domande.

1. Calcolare $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$.
2. Calcolare $\mathbb{E}((X + Y)^2)$ in funzione di h.
3. Determinare la legge congiunta di (X, Y) in funzione di h (Chi non riesce a risolvere il problema in generale, risolva scegliendo il valore $h = 0$).
4. Stabilire per quali valori di h si ha che X e Y sono indipendenti.
5. Stabilire se i seguenti valori di h possono essere assunti (motivando la risposta): $h = 1$, $h = -\frac{1}{3}$.
6. Vengono effettuati 6 campionamenti indipendenti di X. Qual è la probabilità di osservare il valore 1 almeno 3 volte (3 incluse)?

Esercizio 3. (8 punti) Un'azienda manifatturiera gestisce una linea di produzione automatizzata. Il reparto incaricato alla manutenzione ha analizzato i guasti dei macchinari e ha scoperto che il tempo che intercorre tra un guasto e il guasto successivo segue una distribuzione esponenziale con media 14 giorni. Si assuma che i tempi che intercorrono tra i guasti siano indipendenti.

1. Si scelga oggi come tempo zero. Qual è la probabilità che il prossimo guasto si verifichi entro 10 giorni? Che proprietà occorre utilizzare per rispondere correttamente?
2. Qual è la probabilità che non si verifichi alcun guasto in una finestra temporale di 10 giorni? (Suggerimento: Tradurre in una domanda sul tempo per il primo guasto a partire dal tempo iniziale della finestra temporale.)
3. Qual è la probabilità che si verifichi almeno 1 guasto in una finestra temporale di 10 giorni?
4. Qual è la probabilità che si verifichino almeno 2 guasti in una finestra temporale di 10 giorni? (Suggerimento: Considerare il tempo totale trascorso per osservare il primo guasto e il secondo guasto.)
5. Qual è la probabilità che si verifichi esattamente 1 guasto in una finestra temporale di 10 giorni?
6. Qual è la probabilità che si verifichino almeno k guasti in una finestra temporale di 10 giorni? (Suggerimento: Per rispondere, è concesso utilizzare il seguente fatto: Se $X \sim \text{Gamma}(k, \lambda)$, allora la sua FDC è $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!}$, per $x \geq 0$. Chi, in aggiunta, dimostra questo fatto, riceve un bonus.)
7. Dedurre la legge con cui è distribuito il numero di guasti che si verificano in una finestra temporale di 10 giorni, motivando la risposta.

Esercizio 4. (6 punti) Una catena di negozi di elettronica sta valutando se ampliare uno dei suoi punti vendita. Per prendere questa decisione strategica, il management ha bisogno di una stima accurata del fatturato medio giornaliero del negozio. Il responsabile finanziario ha raccolto i dati dei ricavi giornalieri degli ultimi 36 giorni lavorativi. Dall'analisi di questi dati risulta che la media calcolata sui dati del campione è pari a €8450. Si assuma che la deviazione standard della popolazione dei ricavi giornalieri sia €1200. Calcolare sui dati un intervallo di confidenza al 90% per il fatturato medio giornaliero del negozio (N.B.: derivare le formule).

Quesito teorico 1. (2 punti) Calcolare la somma della serie geometrica (con dimostrazione).

Quesito teorico 2. (4 punti) Fornire la definizione di stimatore corretto di un parametro e dimostrare che la varianza campionaria è uno stimatore corretto della varianza della popolazione.

Esame di Probabilità e Statistica [3231]

Corso di Studi di Ingegneria Gestionale (D.M.270/04) (L)

Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management
Politecnico di Bari

Cognome: ____________________	Docente: Gianluca Orlando
Nome: ____________________	Appello: luglio 2025
Matricola: ____________________	Data: 23/07/2025

Questa è la **traccia n. 3**. È obbligatorio consegnare la traccia con cognome e nome. In caso contrario, l'esito sarà "RITIRATO". Scrivere il numero di traccia sullo svolgimento del compito. Tempo massimo: 2 ore.

Esercizio 1. (6 punti) Viene studiato il consumo mensile di acqua (in m^3) in funzione della superficie (in m^2) degli appartamenti in una città. Vengono registrati alcuni dati:

Superficie	65	78	82	70	95	72	65
Consumo	15.2	17.8	18.3	16.5	20.0	16.9	15.1

1. Rappresentare i dati in uno scatterplot.
2. Calcolare la retta di regressione lineare (N.B.: derivare le formule) e rappresentarla nel grafico.
3. Calcolare il coefficiente di correlazione lineare e il coefficiente di determinazione.

Esercizio 2. (8 punti) Un'azienda riceve richieste di preventivi per la fornitura di un certo prodotto. Si assuma che il numero di richieste giornaliere segua una distribuzione di Poisson con media 5 e che le giornate siano indipendenti tra loro.

1. Qual è la probabilità che in un giorno vengano ricevute almeno 4 richieste (4 incluse)?
2. In due giorni consecutivi sono state ricevute in tutto 8 richieste. Sapendo questo, qual è la probabilità che nel primo giorno siano state ricevute almeno 4 richieste (4 incluse)?
3. In due giorni consecutivi sono state ricevute in tutto 8 richieste. Sapendo questo, qual è la legge del numero di richieste ricevute nel primo giorno? (Suggerimento: semplificare la formula per la probabilità che ci siano k richieste nel primo giorno, sapendo che in due giorni ce ne sono 8).
4. Calcolare la deviazione standard del numero di richieste ricevute in 30 giorni.
5. Approssimare la probabilità che in 30 giorni vengano ricevute almeno 140 richieste.
6. Si consideri una sequenza di giorni. Qual è in media il primo giorno in cui si ricevono esattamente 10 richieste?

Esercizio 3. (7 punti) Un'azienda sta valutando l'affidabilità dei suoi fornitori di materiali. Ha notato che il fornitore A consegna in un tempo distribuito esponenzialmente con media di 3 giorni e il fornitore B consegna in un tempo distribuito uniformemente tra 2 e 5 giorni. Si assumano tutte le consegne indipendenti tra loro.

1. Viene effettuato un ordine al fornitore A. Qual è la probabilità che l'ordine venga consegnato oltre 4 giorni?

2. Viene effettuato un ordine al fornitore B. Qual è la probabilità che l'ordine venga consegnato in un tempo compreso tra 1 e 4 giorni?

3. Vengono effettuati 10 ordini al fornitore A. Qual è la probabilità che almeno 3 di questi ordini (3 inclusi) vengano consegnati oltre 4 giorni?

4. Vengono effettuati 5 ordini al fornitore A e 5 ordini al fornitore B. Qual è la probabilità che almeno uno di questi ordini venga consegnato oltre 4 giorni?

5. Vengono effettuati 5 ordini al fornitore A e 5 ordini al fornitore B. Qual è la probabilità che 2 di questi ordini vengano consegnati oltre 4 giorni?

Esercizio 4. (7 punti) Una società di gestione patrimoniale ha recentemente ristrutturato uno dei suoi portafoglio bilanciati, modificando la composizione degli asset per ridurre la volatilità complessiva. Il fund manager sostiene che la nuova strategia di investimento ha portato la deviazione standard dei rendimenti mensili al di sotto del valore target di 0.05. Per verificare questa affermazione, sono stati raccolti i rendimenti mensili del portafoglio ristrutturato negli ultimi mesi, ottenendo i seguenti dati:

$$0.032 \quad -0.018 \quad 0.041 \quad 0.015 \quad -0.025 \quad 0.038 \quad 0.022 \quad -0.012 \quad 0.028 \quad 0.019 \quad -0.031 \quad 0.044$$

Si assuma che i rendimenti mensili siano distribuiti normalmente.

1. Si può confermare con significatività 5% che la deviazione standard dei rendimenti mensili del portafoglio ristrutturato è effettivamente inferiore a 0.05?

2. Specificare in quale dei seguenti intervalli è contenuto il p-value: $[0\%, 0.5\%)$, $[0.5\%, 1\%)$, $[1\%, 2.5\%)$, $[2.5\%, 5\%)$, nessuno dei precedenti.

Quesito teorico 1. (2 punti) Fornire un esempio di variabili aleatorie X e Y tali che $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ ma X e Y non sono indipendenti, spiegando perché.

Quesito teorico 2. (4 punti) Usare la legge Gamma per dimostrare il legame tra $\Gamma(\alpha + \beta)$ e $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$, dove Γ è la funzione Gamma di Eulero.

Esame di Probabilità e Statistica [3231]

Corso di Studi di Ingegneria Gestionale (D.M.270/04) (L)

Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management
Politecnico di Bari

Cognome: ______________________ Docente: Gianluca Orlando
Nome: ______________________ Appello: settembre 2025 - I
Matricola: ______________________ Data: 01/09/2025

Tempo massimo: 2 ore.

Esercizio 1. (6 punti) In uno stabilimento balneare si è registrato il numero di ombrelloni affittati ogni giorno per 12 giorni consecutivi. I dati (numero di ombrelloni) raccolti sono:

14 7 12 6 9 18 11 25 9 8 13 15

1. Calcolare i quartili esclusivi dei dati.
2. Individuare eventuali dati anomali o sospetti.
3. Rappresentare i dati in un box plot.
4. Calcolare il 25-esimo percentile esclusivo.

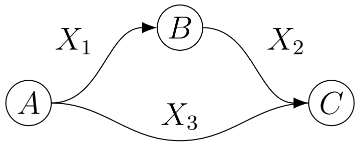
Esercizio 2. (8 punti) Un componente elettronico viene sottoposto a un controllo periodico. Un componente buono ha probabilità 90% di risultare buono al controllo successivo e probabilità 10% di diventare invece difettoso. Si assuma che i controlli siano indipendenti.

1. Si consideri un componente buono. Qual è la probabilità che risulti difettoso per la prima volta entro 5 controlli (5 inclusi)?
2. Si consideri un componente buono. In media, dopo quanti controlli risulterà difettoso per la prima volta?
3. Un componente è risultato sempre buono nei primi 10 controlli. Qual è la probabilità che risulti difettoso al dodicesimo controllo? Motivare la risposta.

Si assuma ora che un componente difettoso abbia probabilità 70% di risultare difettoso al controllo successivo e probabilità 30% di risultare invece buono.

4. Si consideri un componente buono. Qual è la probabilità che risulti buono al secondo controllo? (Suggerimento: Considerare le variabili aleatorie X_i tali che $\{X_i = 1\}$ se buono e $\{X_i = 0\}$ se difettoso al controllo i. Attenzione: non sono indipendenti!)
5. Si consideri un componente buono. Al secondo controllo è risultato difettoso. Qual è la probabilità che fosse difettoso al primo controllo?

Esercizio 3. (7 punti) Per arrivare da A a C si possono percorrere due percorsi (come rappresentato in figura).



Il primo percorso passa per B, il secondo è diretto. I tempi di percorrenza $A \to B$ e $B \to C$ sono rappresentati da variabili aleatorie X_1 e X_2 distribuite esponenzialmente con media 2 minuti. Il tempo di percorrenza diretto $A \to C$ è rappresentato dalla variabile aleatoria X_3 distribuita uniformemente con media 4 minuti in un intervallo della forma $[0, b]$. Si assumano i tempi di percorrenza X_1, X_2 e X_3 indipendenti tra loro.

1. Calcolare la probabilità di impiegare meno di 5 minuti per arrivare da A a B.
2. Calcolare la probabilità di impiegare meno di 5 minuti per arrivare da A a C utilizzando il percorso diretto.
3. Calcolare la probabilità di impiegare meno di 5 minuti per arrivare da A a C utilizzando il percorso che passa per B.
4. Calcolare la probabilità di impiegare meno di 5 minuti per arrivare da A a C considerando il tempo di percorrenza minore tra i due percorsi.
5. Dopo aver osservato che i due percorsi hanno la stessa media, utilizzare una grandezza legata alle variabili aleatorie per valutare se è più incerto il tempo di percorrenza diretto o il tempo di percorrenza che passa per B.

Esercizio 4. (7 punti) Un'agenzia di viaggi specializzata in vacanze estive vuole stimare la durata media dei soggiorni prenotati dai propri clienti durante la stagione estiva. L'agenzia ha raccolto i seguenti dati sulle durate dei soggiorni prenotati (in giorni):

durata	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
frequenza assoluta	3	4	5	5	5	3	2	3	1	1

Si assuma che la deviazione standard della durata dei soggiorni sia nota e pari a 3 giorni.

1. Calcolare un intervallo di confidenza bilaterale al 95% per la durata media dei soggiorni prenotati.
2. Questo tipo di indagine è stato condotto per 6 stagioni estive. Qual è la probabilità che la durata media dei soggiorni prenotati sia compresa nell'intervallo di confidenza al 95% almeno 5 volte su 6 (5 incluse)?

Quesito teorico 1. (3 punti) Quali sono media e varianza di una variabile aleatoria $Q_n \sim \chi^2(n)$? Motivare la risposta.

Quesito teorico 2. (3 punti) Siano $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$ e $Y \sim \mathrm{P}(\mu)$ indipendenti. Cosa si può dire su $X + Y$? Motivare la risposta ed enunciare e dimostrare un risultato.

Esame di Probabilità e Statistica [3231]

Corso di Studi di Ingegneria Gestionale (D.M.270/04) (L)

Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management
Politecnico di Bari

Cognome: ________________	Docente: Gianluca Orlando
Nome: ________________	Appello: settembre 2025 - II
Matricola: ________________	Data: 17/09/2025

Tempo massimo: 2 ore.

Esercizio 1. (6 punti) Una società ferroviaria ha raccolto dati sui ritardi dei treni regionali (in minuti) durante il mese di agosto. I dati sono stati raggruppati nelle seguenti classi:

Ritardo (minuti)	Frequenza assoluta
$[0, 3)$	25
$[3, 5)$	18
$[5, 8)$	30
$[8, 12)$	22
$[12, 20)$	15
$[20, 35)$	10

1. Rappresentare i dati in un istogramma delle densità di frequenze relative.
2. Determinare la classe modale.
3. Calcolare un'approssimazione della media e della deviazione standard dei dati.
4. Calcolare un'approssimazione del settantesimo percentile dei dati.

Esercizio 2. (7 punti) Un'azienda di marketing digitale conduce campagne pubblicitarie attraverso due canali diversi. Nel canale A (social media), la probabilità che un utente clicchi su un annuncio è 25%, mentre nel canale B (motori di ricerca), la probabilità di click è 40%. Il 70% degli utenti utilizza il canale A, mentre il 30% utilizza il canale B. Si assumano i comportamenti degli utenti indipendenti tra loro.

1. Calcolare la probabilità che un utente qualunque clicchi su un annuncio.
2. Che legge ha la variabile aleatoria che indica se un utente clicca su un annuncio? Calcolarne media e varianza.
3. Un utente ha cliccato su un annuncio. Calcolare la probabilità che abbia visto l'annuncio tramite il canale A.
4. Si considerino 10 utenti. Calcolare la probabilità che almeno 4 di essi clicchino sull'annuncio (4 incluso).

5. Si considerino 120 utenti. Approssimare la probabilità che almeno 30 di essi clicchino sull'annuncio (30 incluso).

Esercizio 3. (8 punti) Si studia l'accesso ad un certo servizio online. Il tempo (in ore) che intercorre tra un accesso al servizio e il consecutivo servizio è modellato da una variabile aleatoria esponenziale con media di mezz'ora. Si assuma che i tempi che intercorrono tra accessi successivi siano indipendenti.

1. Si consideri questo istante come tempo zero. Calcolare la probabilità che il prossimo accesso avvenga entro un'ora. Che proprietà della legge è stata utilizzata?

Nelle prossime domande, si consideri una finestra temporale di 1 ora.

2. Calcolare la probabilità che non ci sia alcun accesso in questa finestra temporale.
3. Calcolare la probabilità che ci sia almeno un accesso in questa finestra temporale.
4. Calcolare la probabilità che ci siano almeno 2 accessi in questa finestra temporale. (Suggerimento: considerare il tempo che passa per osservare il primo accesso e poi il secondo accesso).
5. Calcolare la probabilità che ci sia esattamente 1 accesso in questa finestra temporale.
6. Calcolare la probabilità che ci siano esattamente k accessi in questa finestra temporale, con $k \in \mathbb{N}$. (Suggerimento: si può utilizzare il fatto che la FDC di una variabile aleatoria con legge $\Gamma(k, \lambda)$ è $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^n}{n!}$).)
7. Dedurre la legge di probabilità della variabile aleatoria che conta il numero di accessi in questa finestra temporale.

Esercizio 4. (7 punti) Un produttore dichiara che la deviazione standard dei pesi dei componenti che produce non supera i 0.3 grammi. Per verificare questa affermazione, un ispettore di qualità preleva un campione casuale e misura i pesi (in grammi), ottenendo i seguenti risultati:

$$4.2 \quad 4.8 \quad 4.1 \quad 4.6 \quad 4.9 \quad 4.3 \quad 4.7 \quad 5.0 \quad 4.5 \quad 4.8 \quad 4.2$$

Si assuma che i pesi seguano una distribuzione normale.

1. Verificare la credibilità dell'affermazione del produttore con una significatività del 5%. (N.B.: derivare le formule)
2. Specificare in quale dei seguenti intervalli è contenuto il p-value: $[0\%, 1\%)$, $[1\%, 2.5\%)$, $[2.5\%, 5\%)$, $[5\%, 10\%)$, nessuno dei precedenti.

Quesito teorico 1. (3 punti) Sia $X \sim \text{Geo}(p)$. Dimostrare che $\mathbb{P}(\{X > k\}) = (1-p)^k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ partendo dalla formula che fornisce $\mathbb{P}(\{X = k\})$.

Quesito teorico 2. (3 punti) Spiegare il legame tra funzione di distribuzione cumulativa e funzione di densità di probabilità per una variabile aleatoria continua.

Esame di Probabilità e Statistica [3231]

Corso di Studi di Ingegneria Gestionale (D.M.270/04) (L)

Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management
Politecnico di Bari

Cognome: ______________________	Docente: Gianluca Orlando
Nome: ______________________	Appello: gennaio 2026
Matricola: ______________________	Data: 19/01/2026

Tempo massimo: 2 ore.

Esercizio 1. (6 punti) Un'azienda monitora i tempi di evasione (in ore) di alcuni ordini gestiti in un giorno. I tempi osservati sono:

$$3.2 \quad 4.1 \quad 2.8 \quad 3.6 \quad 9.1 \quad 3.9 \quad 4.4 \quad 1.2 \quad 3.1 \quad 3.5$$

1. Determinare i quartili (esclusivi) dei dati.
2. Determinare eventuali dati anomali o sospetti.
3. Tracciare un box-plot.
4. Determinare il 75-esimo percentile (esclusivo) dei dati.

Esercizio 2. (8 punti) In un call center, durante un intervallo di 10 minuti, il numero di chiamate ricevute è una variabile aleatoria. Si assumano le seguenti condizioni:

- se è attiva la campagna promozionale, allora il numero di chiamate ha distribuzione di Poisson con media 4;
- se non è attiva la campagna promozionale, allora il numero di chiamate ha distribuzione di Poisson con varianza 2;
- in una giornata, la campagna promozionale è attiva con probabilità 30%;
- intervalli di 10 minuti sono tra loro indipendenti.

Si risponda ai seguenti quesiti:

1. Sapendo che è attiva la campagna promozionale, calcolare la probabilità che non vengano ricevute chiamate in un intervallo di 10 minuti.
2. Sapendo che la campagna promozionale non è attiva, calcolare la media del numero di chiamate in un intervallo di 10 minuti.
3. Calcolare la probabilità di ricevere esattamente 5 chiamate in un intervallo di 20 minuti della stessa giornata (senza informazioni sulla campagna).

4. In una giornata, si osservano esattamente 5 chiamate in un intervallo di 20 minuti. Calcolare la probabilità che la campagna sia attiva in quella giornata.

5. Si assuma che la campagna sia attiva. Si consideri una giornata lavorativa di 8 ore. Approssimare la probabilità di ricevere almeno 210 chiamate in tale arco di tempo.

Esercizio 3. (8 punti) In un punto di assistenza, un cliente arriva al tempo 0. Il tempo di attesa X (in minuti) prima di essere chiamato allo sportello è esponenziale con media 15 minuti. La durata del servizio allo sportello Y (in minuti) ha legge $Y \sim \mathrm{U}(10, 30)$. Si assuma che X e Y siano indipendenti.

1. Calcolare la probabilità che il cliente attenda meno di 10 minuti prima di essere chiamato.

2. Calcolare la probabilità che il servizio allo sportello abbia una durata inferiore a 15 minuti.

Si denoti con T il tempo totale (attesa + servizio) dall'arrivo (tempo 0) alla fine del servizio.

3. Calcolare $\mathbb{P}(\{T = 20\})$.

4. Calcolare media e deviazione standard di T.

5. Sapendo che il cliente ha atteso meno di 10 minuti, calcolare la probabilità che si verifichi $\{T \geq 50\}$.

6. Scrivere la formula per la densità di T, ricordando come si calcola la densità di una somma di variabili indipendenti.

Esercizio 4. (6 punti) Un'azienda sostiene che il tempo medio (in minuti) di set-up di una macchina non superi i 25 minuti. Un tecnico misura i tempi di set-up in un campione casuale di alcuni interventi e comunica i seguenti dati:

24.7 26.1 25.4 27.0 23.9 24.8 26.5 25.7 26.2 24.3

Si assuma che i tempi di set-up siano distribuiti con legge normale.

1. Si può affermare con significatività 5% che, in realtà, il tempo medio supera 25 minuti? (N.B.: derivare le formule).

2. Dire a quale dei seguenti intervalli appartiene il p-value del test effettuato nel punto precedente: $[0\%, 0.5\%)$, $[0.5\%, 1\%)$, $[1\%, 2.5\%)$, $[2.5\%, 5\%)$, $[5\%, 10\%)$, $[10\%, 100\%]$.

Quesito teorico 1. (3 punti) Siano $X \sim \mathrm{B}(n, p)$ e $Y \sim \mathrm{B}(m, p)$ indipendenti. Che legge ha la variabile aleatoria $Z = X + Y$? Dimostrare il risultato.

Quesito teorico 2. (3 punti) Siano $X_1, X_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ indipendenti. Che legge ha $X_1 - X_2$? Utilizzare questo risultato per calcolare $\mathbb{P}(\{X_1 < X_2\})$.

Esame di Probabilità e Statistica [3231]

Corso di Studi di Ingegneria Gestionale (D.M.270/04) (L)

Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management
Politecnico di Bari

Cognome: ______________________ Docente: Gianluca Orlando
Nome: ______________________ Appello: febbraio 2026
Matricola: ______________________ Data: 16/02/2026

Tempo massimo: 2 ore.

Esercizio 1. (6 punti) Si vuole studiare un'azienda danese produttrice di giocattoli, nota per la sua linea di mattoncini assemblabili. In particolare, si vuole analizzare la relazione tra il numero di mattoncini in una confezione e il prezzo della confezione. Sono stati raccolti i seguenti dati:

Numero di mattoncini	345	879	1498	2050	124	421	276
Prezzo (euro)	20	90	120	200	10	60	30

1. Rappresentare i dati in uno scatterplot.
2. Determinare e disegnare la retta di regressione lineare. (N.B.: derivare le formule).
3. Calcolare il coefficiente di correlazione lineare e il coefficiente di determinazione.

Esercizio 2. (8 punti) Si consideri un vettore aleatorio discreto (X, Y) con funzione di probabilità congiunta descritta dalla seguente tabella:

X / Y	0	1	2
0	a	$2a$	b
1	c	a	$\frac{1}{5}$

Si assuma che

$$\mathbb{P}(\{X = 0\}) = \frac{3}{10}, \qquad \mathbb{P}(\{X = 2\}) = \frac{3}{10}.$$

1. Determinare i valori dei parametri a, b, c.
2. Calcolare $\mathbb{P}(\{X \geq 1\} \cap \{Y = 0\})$.
3. Calcolare $\mathbb{P}(\{Y = 1\} \mid \{X = 1\})$.
4. Calcolare $\mathrm{Var}(2X + 3Y)$.
5. Stabilire se X e Y sono indipendenti.
6. Si continuano a campionare coppie di valori di (X, Y) fino a che non si osserva la coppia $(X, Y) = (2, 1)$. Calcolare la probabilità che si osservi la coppia $(X, Y) = (2, 1)$ per la prima volta al quarto campionamento.

Esercizio 3. (8 punti) L'Esercizio 3 nel compito di Probabilità e Statistica è facile con probabilità 0.6 e difficile altrimenti. Se l'esercizio è facile, il tempo per risolverlo è esponenziale con media 5 minuti. Se l'esercizio è difficile, il tempo per risolverlo è uniforme tra 10 e 20 min.

1. Sapendo che l'esercizio è facile, calcolare la probabilità che il tempo di risoluzione sia superiore a 6 minuti.
2. Sapendo che l'esercizio è difficile, calcolare la probabilità che il tempo di risoluzione sia inferiore a 15 minuti.
3. Calcolare la probabilità che il tempo di risoluzione sia inferiore a 6 minuti (senza informazioni sul livello di difficoltà).
4. Sapendo che l'esercizio è stato risolto in più di 15 minuti, calcolare la probabilità che fosse difficile.
5. 10 studenti affrontano in modo indipendente lo stesso esercizio. Calcolare la probabilità che almeno 4 studenti (4 incluso) risolvano l'esercizio in meno di 15 minuti.
6. 200 studenti affrontano in modo indipendente lo stesso esercizio. Approssimare la probabilità che almeno 150 studenti (90 incluso) risolvano l'esercizio in meno di 15 minuti.

Esercizio 4. (6 punti) Un'azienda misura il tempo (in minuti) necessario per completare una fase di controllo qualità su 6 lotti. Si ottengono i seguenti valori:

$$18.2 \quad 21.5 \quad 19.8 \quad 22.1 \quad 20.4 \quad 17.9\,.$$

Si assuma che il tempo di controllo segua una distribuzione normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

1. Determinare un intervallo di confidenza al 95% per la varianza σ^2. (N.B.: derivare le formule).
2. Determinare un intervallo di confidenza al 95% per la media μ. (non è obbligatorio derivare le formule).

Quesito teorico 1. (3 punti) Siano $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$ e $Y \sim \mathrm{P}(\mu)$ indipendenti. Che legge ha la variabile aleatoria $Z = X + Y$? Dimostrare il risultato.

Quesito teorico 2. (3 punti) Fornire la definizione di funzione di distribuzione cumulativa di una variabile aleatoria e spiegare il suo legame con la funzione di densità di probabilità nel caso di variabili aleatorie continue.

Esame di Probabilità e Statistica [3231]

Corso di Studi di Ingegneria Gestionale (D.M.270/04) (L)

Dipartimento di Meccanica, Matematica e Management
Politecnico di Bari

Cognome: ______________________ Docente: Gianluca Orlando
Nome: ______________________ Appello: aprile 2026
Matricola: ______________________ Data: 23/04/2026

Tempo massimo: 2 ore.

Esercizio 1. (6 punti) Vengono registrati i consumi bimestrali di energia elettrica di alcune utenze domestiche. I dati vengono raccolti in classi di consumo, come riportato nella tabella seguente:

intervallo di consumo (kWh)	frequenza assoluta
$[80, 100)$	8
$[100, 130)$	18
$[130, 150)$	15
$[150, 190)$	22
$[190, 230)$	7

1. Rappresentare un istogramma delle densità di frequenze relative.
2. Determinare la classe modale.
3. Calcolare un'approssimazione della media e della varianza dei consumi.
4. Calcolare un'approssimazione del 70-esimo percentile dei consumi.

Esercizio 2. (8 punti) In un supermercato, il numero di pezzi di prodotto A venduti in un giorno è una variabile aleatoria distribuita con legge di Poisson con media 10. Il numero di pezzi di prodotto B venduti in un giorno è una variabile aleatoria distribuita con legge di Poisson con media 5.

1. Qual è la probabilità che in un giorno vengano venduti esattamente 12 pezzi di prodotto A?
2. Qual è la probabilità che in un giorno vengano venduti strettamente più di 5 pezzi di prodotto B?
3. Si considerino sia prodotto A che prodotto B. Qual è la probabilità che in un giorno vengano venduti esattamente 15 pezzi in totale?
4. Si considerino sia prodotto A che prodotto B. Qual è la varianza dei pezzi venduti in totale in un giorno?

5. Si considerino sia prodotto A che prodotto B. In totale sono stati venduti 12 pezzi in un giorno. Qual è la probabilità che siano stati venduti più di 10 pezzi di prodotto A?
6. Si considerino 60 giornate e si considerino sia il prodotto A che il prodotto B. Approssimare la probabilità che in totale siano stati venduti più di 950 pezzi in queste 60 giornate.

Esercizio 3. (8 punti) In un conferenza, la durata delle presentazioni degli speaker è aleatoria. Se non ci sono problemi tecnici, la durata di una presentazione è distribuita esponenzialmente con media 25 minuti. Se invece ci sono problemi tecnici, la durata di una presentazione è distribuita esponenzialmente con media 30 minuti. La probabilità che ci sia un problema tecnico è $\frac{1}{10}$.

1. Si consideri una presentazione senza problemi tecnici. Qual è la probabilità che duri più di 30 minuti?
2. Si consideri una presentazione con problemi tecnici. Qual è la varianza della durata della presentazione?
3. Si consideri una presentazione qualunque. Qual è la probabilità che duri più di 30 minuti?
4. In una giornata di conferenza, ci sono 8 presentazioni indipendenti. Qual è la probabilità che almeno 3 presentazioni durino più di 30 minuti?
5. Si considerino due presentazioni consecutive indipendenti, entrambe senza problemi tecnici. Qual è la probabilità che la durata totale delle due presentazioni sia maggiore di 60 minuti?

Esercizio 4. (7 punti) Un'azienda alimentare sostiene che il peso medio delle confezioni di pasta prodotte sia 500 g. Viene prelevato un campione e vengono misurati i pesi di alcune confezioni:

$$502 \quad 498 \quad 501 \quad 497 \quad 503 \quad 499 \quad 496 \quad 504 \quad 500 \quad 495\,.$$

Si assuma che il peso delle confezioni abbia distribuzione normale.

1. Si può stabilire con significatività 5% che il peso medio delle confezioni sia diverso da 500 g? (N.B.: derivare le formule)
2. Il p-value del test del punto precedente è più grande o più piccolo del 6%?

Quesito teorico 1. (4 punti) Enunciare e dimostrare la Legge dei Grandi Numeri.

Quesito teorico 2. (2 punti) Enunciare e dimostrare l'assenza di memoria per la legge geometrica.